PART3 $a_{n+1}=pa_n+q$ の形の漸化式

要点① $a_{n+1}=pa_n+q$ の形の漸化式

$a_1=4$，$a_{n+1}=2a_n-1$ によって定められる数列 $\{a_n\}$ を考える。

$a_1=4$，$a_2=\quad$，$a_3=\quad$，$a_4=\quad$，……

である。この数列の各項から1を引いた数列　　　　について

$a_1-1=\quad$，$a_2-1=\quad$，$a_3-1=\quad$，$a_4-1=\quad$，……

であり，数列 $\{a_n-1\}$ は初項3，公比2の等比数列であると考えられる。

数列 $\{a_n-1\}$ が公比2の等比数列であることを表す漸化式は

$\quad=2(\quad)$

であり，この漸化式を変形すると，$a_{n+1}=2a_n-1$ が得られる。

漸化式 $a_{n+1}=2a_n-1$ …… ①に対して，①の a_{n+1} と a_n を α でおき換えた等式

$\quad=2\quad-1$ …… ②

を用意する。①－②より

$a_{n+1}-\quad=2(a_n-\quad)$ …… ③

$$\begin{array}{rrl} & a_{n+1} &= 2a_n-1 \\ -) & \alpha &= 2\alpha-1 \\ \hline & a_{n+1}-\alpha &= 2(a_n-\alpha) \end{array}$$

また，②より

これを③に代入して

$a_{n+1}-1=2(a_n-1)$

を得る。

一般に，p，q が定数で $p\neq0$，$p\neq1$ のとき，漸化式 $a_{n+1}=pa_n+q$ は，等式 $\alpha=p\alpha+q$ を満たす α を用いて，$a_{n+1}-\alpha=p(a_n-\alpha)$ の形に変形することができる。

例 $a_1=4$，$a_{n+1}=2a_n-1$ によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求める。

$a_{n+1}=2a_n-1$ を変形すると　$a_{n+1}-1=2(a_n-1)$

よって，数列　　　　は，初項　　　$=4-1=\quad$，

公比　の等比数列である。

したがって　　　$=3\cdot2^{n-1}$ より 求める一般項は　$=3\cdot2^{n-1}+1$

$\alpha=2\alpha-1$
$\alpha=1$

[MEMO]

3　次のように定められた数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1)　$a_1=6,\ a_{n+1}=3a_n-8$

(2)　$a_1=-1,\ a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n-3$

Point Pickup

$a_{n+1}=pa_n+q$ の形の漸化式

等式 $\alpha=p\alpha+q$ との差をとり，$a_{n+1}-\alpha=p(a_n-\alpha)$ の形に変形すると，数列 $\{a_n-\alpha\}$ は初項 $a_1-\alpha$，公比 p の等比数列であることがわかる。

第 5 講　PART3 確認問題

次のように定められた数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

1　$a_1=6$，$a_{n+1}=4a_n-3$　($n=1$，2，3，…)

$$a_n=\boxed{\text{ア}}\cdot\boxed{\text{イ}}^{n-1}+\boxed{\text{ウ}}$$

2　$a_1=5$，$a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+1$　($n=1$，2，3，…)

$$a_n=\frac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}^{n-1}}+\boxed{\text{カ}}$$

PART3 $a_{n+1}=pa_n+q$ の形の漸化式

3 次のように定められた数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1) $a_1=6$, $a_{n+1}=3a_n-8$

(2) $a_1=-1$, $a_{n+1}=\dfrac{1}{2}a_n-3$

[解答]

(1) $a_{n+1}=3a_n-8$ を変形すると　$a_{n+1}-4=3(a_n-4)$

よって，数列 $\{a_n-4\}$ は，初項　$a_1-4=6-4=2$，公比 3 の等比数列である。

したがって $a_n-4=2\cdot3^{n-1}$　より　求める一般項は $a_n=2\cdot3^{n-1}+4$

(2) $a_{n+1}=\dfrac{1}{2}a_n-3$ を変形すると　$a_{n+1}+6=\dfrac{1}{2}(a_n+6)$

よって，数列 $\{a_n+6\}$ は，初項 $a_1+6=-1+6=5$，公比 $\dfrac{1}{2}$ の等比数列である。

したがって $a_n+6=5\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$ より 求める一般項は $a_n=5\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}-6$

第 5 講　PART3 確認問題 解答

1

[正解] ア：5，イ：4，ウ：1

[解説]

$a_{n+1}=4a_n-3$ を変形すると，

$$a_{n+1}-1=4(a_n-1) \quad \text{[A]}$$

よって，数列 $\{a_n-1\}$ は，

初項 $a_1-1=6-1=5$，公比 4 の等比数列である。

したがって，

$$a_n-1=5\cdot4^{n-1}$$

求める一般項は，

$$\boldsymbol{a_n=5\cdot4^{n-1}+1}$$

[A]

$$\begin{array}{rl} & a_{n+1}=4a_n-3 \\ -) & \alpha=4\alpha-3 \\ \hline & a_{n+1}-\alpha=4(a_n-\alpha) \end{array}$$

ここで，$\alpha=1$ である。

2

[正解] エ：3，オ：2，カ：2

[解説]

$a_{n+1}=\dfrac{1}{2}a_n+1$ を変形すると，

$$a_{n+1}-2=\frac{1}{2}(a_n-2) \quad \text{[B]}$$

よって，数列 $\{a_n-2\}$ は，

初項 $a_1-2=5-2=3$，公比 $\dfrac{1}{2}$ の等比数列である。

したがって，

$$a_n-2=3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

求める一般項は，

$$\boldsymbol{a_n=\frac{3}{2^{n-1}}+2} \quad \text{[C]}$$

[B]

$$\begin{array}{rl} & a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+1 \\ -) & \alpha=\frac{1}{2}\alpha+1 \\ \hline & a_{n+1}-\alpha=\frac{1}{2}(a_n-\alpha) \end{array}$$

ここで，$\alpha=2$ である。

[C] $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}=\dfrac{1}{2^{n-1}}$